

ねじりを受ける円形および環状き裂を有する円柱の干渉問題

秋 山 孝 夫*・大久保 重 範*・原 利 昭**

*工学部機械システム工学科

**新潟大学工学部機械システム工学科

A Cylinder with a Pair of Circular and Circumferential Cracks under Torsion

Takao AKIYAMA*, Shigenori OKUBO* and Toshiaki HARA**

**Department of Mechanical Systems Engineering, Faculty of Engineering*

***Department of Mechanosystem Engineering, Faculty of Engineering, Niigata University*

(平成5年8月16日受理)

Abstract

In this paper, we present a solution on the axisymmetric torsion problem of an infinite cylinder with circular and circumferential cracks lying on the same plane within three-dimensional elasticity. Expressing the stress component along the crack plane as appropriate series, we reduce the problem to the solution of an infinite system of simultaneous equations. Numerical results are shown in order to discuss the effect of the two crack depths on the displacement and stress distributions at the crack tips and stress intensity factors.

1. 緒言

機器や設備の強度保全・保守において、その構造健全性を破壊力学に基づいて評価する研究が重要視されている。中でも線形弾性論に基づくこの種の研究は基本的ではあるが、工学的に重要な意義を有し、関連した種々の研究例がこれまで示されている。き裂を有する円柱のねじり問題もその中の一つであり、例えば、渋谷ら¹⁾は外周環状き裂を有する無限円柱に一定トルクを作用させた場合を解析し、き裂近傍の変位や応力分布、応力拡大係数を求めている。内山ら²⁾は偏平回転だ円体状空かあるいは円形き裂を有する無限円柱のねじり問題を扱い、き裂を含む面上の応力分布や応力拡大

係数を明示している。また、渋谷ら³⁾は複数個の外周環状き裂を有する円柱にトルクを加えた場合を解析し、応力拡大係数に及ぼすき裂の干渉効果を明らかにしている。しかしながら、円柱の横断面上に一对の円形および環状き裂が存在する場合のこの種の研究例は、著者らの知る限りでは見当たらないようである。そこで、本研究では円形および外周環状き裂が同一平面状に存在する無限円柱にトルクを与える問題を解析した。数値計算を行なってき裂近傍の変位や応力分布を明示するとともに、応力拡大係数に及ぼすき裂干渉効果の影響を明らかにした。

2. 応力解析

円柱座標 (r, θ, z) における変位成分と応力成分をそれぞれ (u_r, v_θ, w_z) , $(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{\theta z}, \tau_{r\theta})$ とすれば, 軸対称ねじりが作用する弾性体の基礎方程式の解は調和応力関数 λ_3 を用いて次のように表示できる。

$$\left. \begin{aligned} v_\theta &= -\partial \lambda_3 / \partial r, \quad u_r = w_z = 0 \\ \tau_{\theta z} &= G \partial^2 \lambda_3 / (\partial r \partial z) \\ \tau_{r\theta} &= G \{ \partial^2 \lambda_3 / \partial z^2 + 2 \partial \lambda_3 / (r \partial r) \} \\ \sigma_r &= \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{rz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで, G は横弾性係数である。

図1に示すように, 半径 r_{ci} , r_{ce} の円形および環状き裂を有する半径 r_o の無限円柱をトルク T でねじる場合を解析する。き裂を含む面に関して応力場は対称であることから, 本問題は $z \geq 0$ の領域を考慮すれば十分であり, この場合の境界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad & (v_\theta)_{z=0} = 0, \quad (r_{ci} \leq r \leq r_{ce}) \\ (ii) \quad & (\tau_{\theta z})_{z=0} = 0, \quad (0 \leq r < r_{ci}, \quad r_{ce} < r \leq r_o) \\ (iii) \quad & (\tau_{r\theta})_{r=r_o} = 0, \quad (0 \leq z < \infty) \\ (iv) \quad & z \rightarrow \infty \quad \text{で} \quad T = 2\pi \int_0^{r_o} r^2 (\tau_{\theta z})_{z=\infty} dr \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

円柱の無限遠方での応力場はき裂が無い円柱をねじる場合の解に一致することを考慮すれば, λ_3

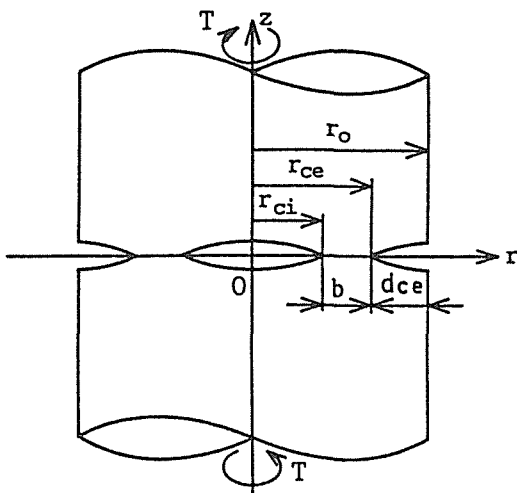


Fig. 1 Geometry of the problem

を次のように選ぶことができる。

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= A_0(r^2 - 2z^2) + B_0z(2z^2 - 3r^2) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0(\xi_m r) \exp(-\xi_m z) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで, $J_n(x)$ は n 次の第一種ベッセル関数, $A_m (m=0, 1, \dots)$, B_0 は境界条件より定められる未知係数である。

式(1)と(3)による変位および応力は次のように表示できる。

$$\left. \begin{aligned} v_\theta &= -2A_0r + 6B_0rz + \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m A_m \\ &\quad \times J_1(\xi_m r) \exp(-\xi_m z) \\ \tau_{\theta z} &= 6GB_0r - G \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^2 A_m J_1(\xi_m r) \\ &\quad \times \exp(-\xi_m z) \\ \tau_{r\theta} &= -G \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^2 A_m J_2(\xi_m r) \\ &\quad \times \exp(-\xi_m z) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

境界条件 (iii) は $z \geq 0$ に対して常に成立することから $\xi_m (m=1, 2, \dots)$ は次式

$$J_2(\xi_m r_o) = 0 \quad (5)$$

を満足する正根 ($0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots$) として与えられる。また, 境界条件 (iv) を用いれば $(\tau_{\theta z})_{z=\infty} = 6GB_0r$ となることから B_0 は次のようになる。

$$B_0 = T / \{3\pi G r_o^4\} \quad (6)$$

式(6)を考慮するとともに, 式(4)に境界条件 (i), (ii) を適用すれば, 次式を得る。

$$-2A_0r + \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m A_m J_1(\xi_m r) = 0, \quad (r_{ci} \leq r \leq r_{ce}) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{2T}{\pi r_o^4} r - G \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^2 A_m J_1(\xi_m r) &= 0 \\ (0 \leq r < r_{ci}, \quad r_{ce} < r \leq r_o) \end{aligned} \quad (8)$$

従って, 本問題は級数方程式(7), (8)を満足する A_m を決定する問題になる。ここでは, き裂を含む面上の応力を級数展開することにより解析を行なう。

いま, 変域 $r_{ci} \leq r \leq r_{ce}$ で変数変換

$$\left. \begin{aligned} b &= (r_{ce} + r_{ci})/2, \quad w = (r_{ce} - r_{ci})/2 \\ r^2 &= b^2 + w^2 - 2bw \cos \phi \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

を行なえば $r_{ci} \leq r \leq r_{ce}$ は $0 \leq \phi \leq \pi$ ($r=r_{ci}$ で $\phi=0$, $r=r_{ce}$ で $\phi=\pi$) に対応する。渋谷⁴⁾による円環状剛体パンチによる半無限体のねじり問題の結果を参考にすれば, $(\tau_{\theta z})_{z=0}$ は円形き裂先端 ($r=r_{ci}$) および環状き裂先端 ($r=r_{ce}$) において, それぞれ $(r^2-r_{ci}^2)^{-1/2}$, $(r_{ce}^2-r^2)^{-1/2}$ の特異性を有し, $r_{ci} < r < r_{ce}$ では有限かつ連続である。そこで $\{(r^2-r_{ci}^2)(r_{ce}^2-r^2)\}^{1/2} = 2bw \sin \phi$ の関係を考慮すれば, $(\tau_{\theta z})_{z=0}$ は未知係数 α_n を用いて次のように級数表示できる。

$$(\tau_{\theta z})_{z=0} = \frac{r}{bw \sin \phi} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos n \phi, \quad (r_{ci} < r < r_{ce}) \quad (10)$$

ξ_m が式(5)の正根であることを考慮して, 式(10)の右辺を $0 \leq r \leq r_o$ でベッセル展開し, 式(8)の左辺の係数と等置すれば, 次式を得る。

$$T = 2\pi^2 \{ \alpha_0(b^2 + w^2) - \alpha_1 bw \} \quad (11)$$

$$A_m = \frac{2\pi}{G} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P(n, m) \quad (12)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} P(n, m) &= g_n(\xi_m) / \{ \xi_m r_o J_1(\xi_m r_o) \}^2 \\ g_n(\xi_m) &= 2n J_n(\xi_m w) J_n(\xi_m b) / \xi_m \\ &\quad - w J_{n+1}(\xi_m w) J_n(\xi_m b) \\ &\quad - b J_n(\xi_m w) J_{n+1}(\xi_m b) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式(12)は任意の α_n に対して $(\tau_{\theta z})_{z=0}$ の境界条件を満足することから, α_n を決定するために残りの式(7)を用いる。そこで, $X_P(\xi_m) = J_{P+1}(\xi_m w) J_{P+1}(\xi_m b)$ と置いてゲーゲンポウアの加法定理⁵⁾

$$J_1(\xi_m r) = \frac{2r}{\xi_m bw \sin \phi} \sum_{p=0}^{\infty} (p+1) X_P(\xi_m) \times \sin(p+1)\phi, \quad (r_{ci} \leq r \leq r_{ce}) \quad (14)$$

を式(7)に代入すれば, 次式を得る。

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sum_{p=0}^{\infty} (p+1) X_P(\xi_m) \sin(p+1)\phi = A_0 bw \sin \phi, \quad (r_{ci} \leq r \leq r_{ce}) \quad (15)$$

式(15)は r の領域で任意の r に対して成立することから両辺の $\sin(p+1)\phi$ に関する係数を等置すれば, 次式を得る。

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m X_P(\xi_m) = A_0 bw \delta_{0P}, \quad (p=0, 1, 2, \dots) \quad (16)$$

ここで, δ_{ij} はクロネッカ・デルタである。式(16)に式(12)を代入して総和の順序を交換すれば, 次のような α_n , A_0 に関する無限連立一次方程式を得る。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n D(n, p) = A_0 G \delta_{0P}, \quad (p=0, 1, 2, \dots) \quad (17)$$

ここで,

$$D(n, p) = \frac{2\pi}{bw} \sum_{m=1}^{\infty} X_P(\xi_m) P(n, m) \quad (18)$$

式(17)を解いて α_n/A_0 を決定すれば, 式(11), (12)より A_0 および A_m が定められる。これらを式(4)に代入すれば, 円柱の全ての変位と応力が求められる。

円形き裂および環状き裂に対するモードⅢの応力拡大係数 $K_{\text{III}x}$, ($x=i, e$) は次式

$$\left. \begin{aligned} K_{\text{III}i} &= \lim_{r \rightarrow r_{ci} + 0} \{ 2\pi(r-r_{ci}) \}^{1/2} (\tau_{\theta z})_{z=0} \\ K_{\text{III}e} &= \lim_{r \rightarrow r_{ce} - 0} \{ 2\pi(r_{ce}-r) \}^{1/2} (\tau_{\theta z})_{z=0} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

で定義され, 式(10)より次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} K_{\text{III}i} &= \{ \pi r_{ci} / (bw) \}^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \\ K_{\text{III}e} &= \{ \pi r_{ce} / (bw) \}^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

3. 数値結果

式(17)を有限な N 項で打ち切って解く場合, $N=10$ とすれば, いずれの r_{cx} , ($x=i, e$) に対しても α_n/A_0 の収束性は良好であり, これらの係数値を用いて得られる応力拡大係数値や応力値は4桁程度一致することを確認した。なお, 以下の結果で論ずる変位と応力はそれぞれ $r_o \tau_{\infty}/G$ および τ_{∞} で除して得られる無次元量であり, これらをはじめとする無次元化した諸量には“*”付して表示する。ここで τ_{∞} は円柱にき裂が無い場合の公称応力を表し,

$$\tau_{\infty} = 2T / (\pi r_o^3) \quad (21)$$

また, 環状き裂深さを $d_{ce} = r_o - r_{ce}$ とする。

図2および3はそれぞれき裂半径を $r_{ci}/r_o = 0.25$, $r_{ce}/r_o = 0.75$ とした場合の v_{θ}^* と $\tau_{\theta z}^*$ の分布図で

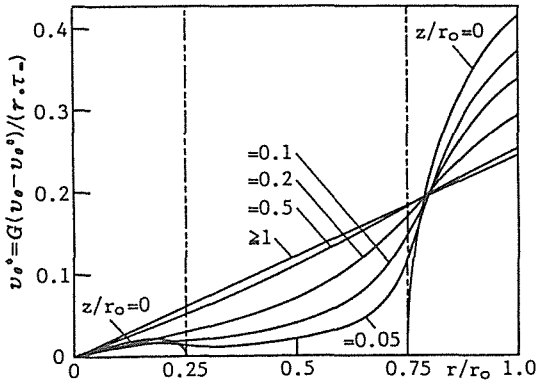


Fig. 2 Distribution of v_{θ}^* for $r_{ci}/r_o = 0.25$ and $r_{ce}/r_o = 0.75$

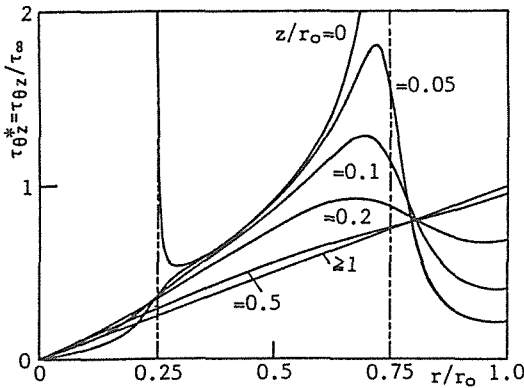


Fig. 3 Distribution of $\tau_{\theta z}^*$ for $r_{ci}/r_o = 0.25$ and $r_{ce}/r_o = 0.75$

ある。図2においては変位に及ぼすき裂の影響を明らかにするために、円柱にき裂が無い場合の変位 $v_{\theta}^0 (= 2Tr/(\pi r_o^4 G))$ を差し引いた結果を示した。図2より、き裂面 ($z \geq 0$) における v_{θ}^* は、き裂先端 ($r=r_{ci}-, r_{ce}+$) でその半径方向勾配が無限大となる。 z/r_o が増加してき裂面から離れるとともに v_{θ}^* の分布曲線は滑らかになり、 $z/r_o \geq 1$ では $v_{\theta} \approx v_{\theta}^0 - 2A_{\theta}r$ となって v_{θ} はき裂が存在することにより $-2A_{\theta}r$ だけ大きくなる。また、いずれの z/r_o に対しても $r=r_o$ で v_{θ}^* は最大となる。図3において、き裂を含む面上 ($z=0$) の $\tau_{\theta z}^*$ はき裂先端 ($r=r_{ci}+ r_{ce}-$) で無限大になり、 z/r_o が増加してき裂面から遠ざかるとともに $\tau_{\theta z}^*$ に及ぼすき裂先端の影響は小さくなる。 $z/r_o \geq 1$ であれば、き裂による影響は消失し、 $\tau_{\theta z}^*$ はき裂が無い場合の結果にはば一致する。

図4は環状き裂深さを $d_{ce}/r_o = 0.2$ と一定にし、

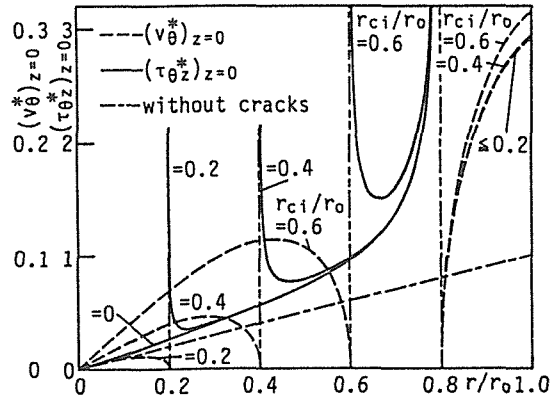


Fig. 4 Variation of $(v_{\theta}^*)_{z=0}$ and $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$ with r_{ci}/r_o , ($d_{ce}/r_o = 0.2$)

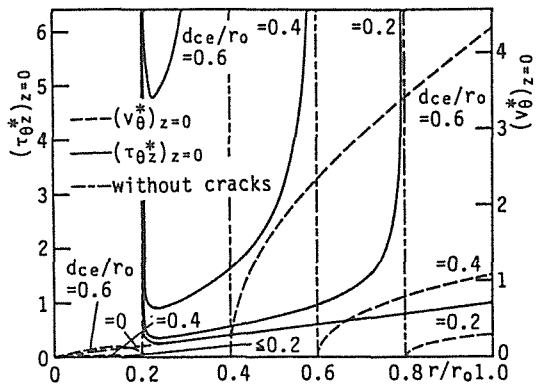
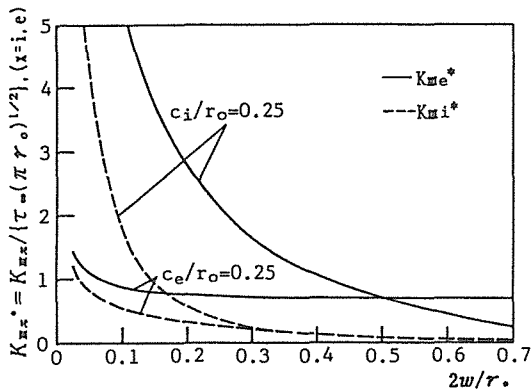


Fig. 5 Variation of $(v_{\theta}^*)_{z=0}$ and $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$ with d_{ce}/r_o , ($r_{ci}/r_o = 0.2$)

円形き裂半径を $r_{ci}/r_o = 0.2, 0.4, 0.6$ と変化させた場合の $(v_{\theta}^*)_{z=0}$ (破線) と $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$ (実線) の分布図であり、比較のために円柱にき裂が無い場合の $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$ を一点鎖線で示した。なお、 $r_{ci}/r_o = 0$ の結果は外周環状き裂を有する円柱をねじった場合の結果¹⁾を示している。き裂面における $(v_{\theta}^*)_{z=0}$ は r_{ci}/r_o の増加とともに大きくなり、いずれの r_{ci}/r_o に対してもき裂先端 ($r=r_{ci}-, r_{ce}+$) でその半径方向勾配が無限大となる。これに対して $r_{ci} < r < r_{ce}$ における $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$ は、 r_{ci}/r_o の増加とともにその最小値は大きくなり、いずれの r_{ci}/r_o に対してもき裂先端 ($r=r_{ci}+, r_{ce}-$) で無限大になる。 r_{ci}/r_o が零に近づくとともに $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$ の無限大への漸近のし方は急激になってき裂先端の影響は局部的になる。

図5は $r_{ci}/r_o = 0.2$ とした場合の種々の d_{ce}/r_o に対する $(v_{\theta}^*)_{z=0}$ (破線) と $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$ (実線) の分布図

Fig. 6 Variation of K_{\max} with $2w/r_0$.

であり、 $d_{ce}/r_0 = 0$ の場合の結果は円形き裂を有する円柱をねじった場合の結果⁶⁾を表している。き裂面上の $(v_\theta^*)_{z=0}$ は d_{ce}/r_0 の増加とともに大きくなり、いずれの d_{ce}/r_0 に対してもき裂先端でその半径方向分布は無限大になる。一方、 $r_{ci} < r < r_{ce}$ における $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$ は d_{ce}/r_0 の増加とともにその最小値は大きくなり、いずれの d_{ce}/r_0 に対してもき裂先端で無限大となる。 d_{ce}/r_0 が零に近づくとともに $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$ に及ぼすき裂先端の影響は局部的になる。

図6は $r_{ci}/r_0 = 0.25$, $d_{ce}/r_0 = 0.25$ の各場合において、無次元化した応力拡大係数 $K_{\max}^* = K_{\max} / \{\tau_\infty(\pi r_0)^{1/2}\}$, $(x=i, e)$ と $z=0$ 面の接着領域パラメータ $2w/r_0$, $(w=r_{ce}-r_{ci})$ の関係を示した図である。図中の実線と破線はそれぞれ x が e と i の場合を示している。 $2w/r_0$ が小さくなってき裂が近接するとともに、き裂の干渉効果により K_{\max}^* は急激に大きくなる。また、 $2w/r_0$ の全域において $K_{me}^* > K_{mi}^*$ となり、環状き裂先端近傍のせん断応力場は、円形き裂先端近傍のそれよりも常に強

いことがわかる。

4. 結論

同一平面上の円形および外周環状き裂を有する無限円柱を一定トルクでねじる問題を三次元弾性論に基づいて解析した。き裂を含む面上の変位、応力分布および応力拡大係数を示すとともに、これらに及ぼすき裂深さの影響を調べた。その結果を要約すると次のようになる。

- (1) 両き裂が深くなるほどき裂面の $(v_\theta^*)_{z=0}$ は大きくなる。また、き裂を含む面上の $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$ はき裂の両先端 ($r=r_{ci}+r_{ce}-$) で無限大となり、き裂が浅くなるほど $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$ に及ぼすき裂先端の影響は局部的になる。
- (2) 両き裂が近接するほどき裂干渉効果が著しくなるため、無次元化した応力拡大係数 K_{\max}^* , $(x=i, e)$ は急激に大きくなる。

最後に、本研究を遂行するにあたり、御助言を賜りました東京工業大学教授の渋谷寿一・小泉堯両先生に感謝申し上げます。

文献

- 1) 渋谷・小泉・奥屋, 機論, 44-388, 4052(1978).
- 2) 内山・土田・中原・小玉, 機論, 47-422, 1012(1981).
- 3) 渋谷・小泉・中原・鈴木, 機論, 58-550, A, 824(1992).
- 4) 渋谷, 機論, 41-347, 1957(1975).
- 5) 森口・宇田川・一松, 数学公式(Ⅲ), 218(岩波書店, 1963).
- 6) 秋山・原・渋谷・小泉, 機論, 59-557, A, 37(1993).